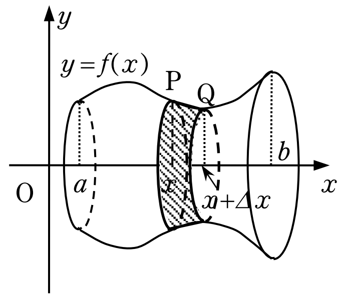
回転体の表面積

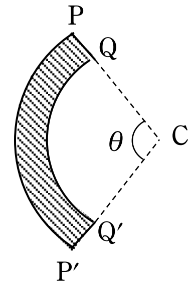


曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の表面積を求めてみよう。

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ とする。

曲線 $y=f(x)$上に 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ をとり，線分 PQ を x 軸のまわりに回転してできる円錐台の側面の面積ΔS は，$\Delta x>0$ のとき，

右図のように展開図における扇形の中心角をθとして，



$$\Delta S = \frac{1}{2}\mathrm{CP}^2\cdot\theta - \frac{1}{2}\mathrm{CQ}^2\cdot\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{CP}-\mathrm{CQ})(\mathrm{CP}+\mathrm{CQ})\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot(\mathrm{CP}\cdot\theta+\mathrm{CQ}\cdot\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot(\,\overparen{\mathrm{PP'}}+\overparen{\mathrm{QQ'}}\,)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\left\{2\pi y+2\pi(y+\Delta y)\right\} = 2\pi\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,(y+\frac{1}{2}\Delta y))\Delta x$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,(y+\frac{1}{2}\Delta y)$$

ここで，$\Delta x \to 0$ とすると，$\Delta y \to 0$ より，

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi f(x)\sqrt{1+\left\{f'(x)\right\}^2}$$

よって，道のりなどの場合と同様で，求める表面積 S は，

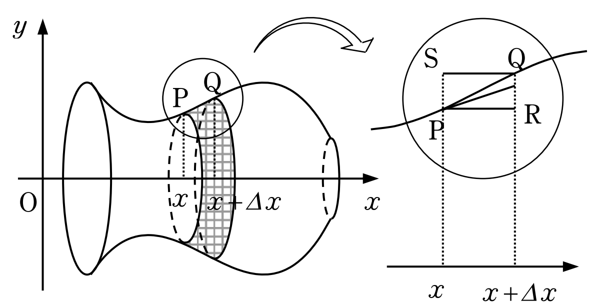
$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$　と表される。

回転体の表面積

滑らかな曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面の面積 S は

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で表される。



【補足】上の公式からわかるように，右図において，回転体の表面積を，線分 PR や SQ を x 軸のまわりに回転してできる円柱で近似して，$2\pi f(x)\Delta x$ や $2\pi f(x+\Delta x)\Delta x$ としても求められないので注意が必要。

例．円 $x^2+y^2=r^2$ を x 軸のまわりに回転してできる球面の表面積を求めなさい。

（解）　$y=\sqrt{r^2-x^2}$ を x 軸のまわりに回転してできる曲面の表面積と考えて，

$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ より，球面の表面積 S は

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=4\pi\int_0^r r\,dx=4\pi r^2$$